

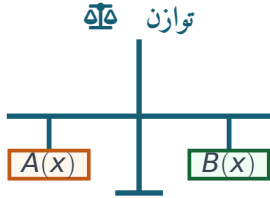
حل المعادلات

من فهم المساواة إلى اختيار الطريقة المناسبة

🎯 قواعد + منهجية + أمثلة + تمارين محلولة



لماذا نحل المعادلات؟



فكرة الدرس

المعادلة تشبه ميزاناً: نبحث عن قيمة x التي تجعل الطرفين متساويين.

$$\boxed{\text{الطرف الأيسر}} = \boxed{\text{الطرف الأيمن}}$$

حل المعادلة يعني إيجاد جميع القيم التي تحقق المساواة.

هل تكفي قيمة واحدة صحيحة؟ لا، نبحث عن كل الحلول.

📖 عمليات لا تغيّر الحلول

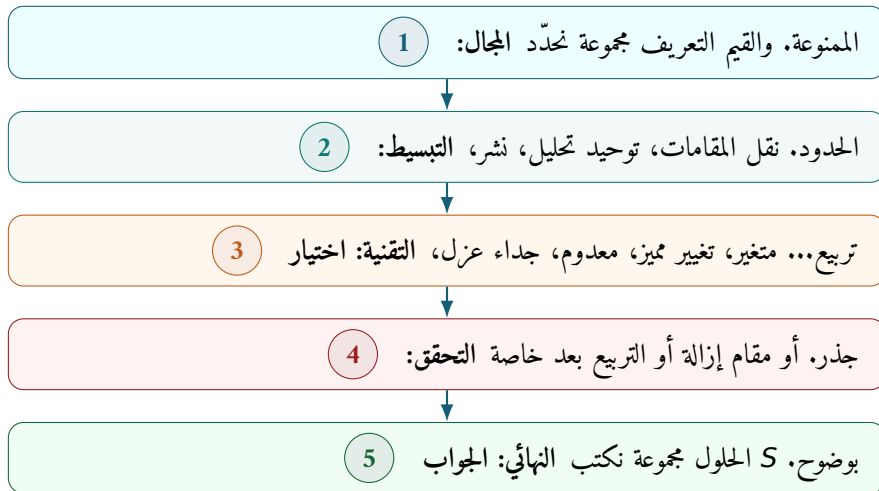
إذا كانت $A = B$ فيمكننا:

- ▶ إضافة العبارة نفسها للطرفين: $A + C = B + C$
- ▶ ضرب الطرفين في عدد غير منعدم: $\lambda A = \lambda B$, حيث $\lambda \neq 0$

⚠ انتبه

الضرب أو القسمة على عبارة تحتوي على x يحتاج إلى الانتباه، لأنها قد تساوي صفراً لبعض القيم.

🔒 نحدّد القيم الممنوعة أولاً.



مثال 16: نشر ثم تنظيم ✓

$$5(2x - 3) - 3(x + 1) = 2(2x - 5) + 4$$

$$10x - 15 - 3x - 3 = 4x - 10 + 4,$$

$$7x - 18 = 4x - 6,$$

$$3x = 12,$$

$$x = 4.$$

$$S = \{4\}$$

$$A(x)B(x) = 0$$

يعني أن واحداً على الأقل من العاملين يساوي صفراً:

$$\boxed{A(x) = 0} \quad \text{أو} \quad \boxed{B(x) = 0}.$$


أولاً حلّ


 $0 =$ الجداء اجعل


عامل كل حلّ

مثال 17



$$(x^2 - 4x + 3)(2x + 5) = 0$$

نحلل:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

إذن:

$$(x - 1)(x - 3)(2x + 5) = 0$$

ومنها:

$$x = 1, \quad x = 3, \quad x = -\frac{5}{2}.$$

$$S = \left\{-\frac{5}{2}, 1, 3\right\}$$



المنوعة القيم

$$\frac{1}{x-a} \quad \text{يفرض} \quad x \neq a$$

🔑 قبل إزالة المقامات

1. نحدد متى يساوي المقام صفراً.
2. نستبعد هذه القيم.
3. نضرب في المقام المشترك على مجموعة التعريف فقط.
4. نتحقق من الحلول النهائية.

مثال 18 ✓

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 4$$

القيم الممنوعة: $x \neq 1$ و $x \neq -1$.

$$(x+2)(x+1) + (x-2)(x-1) = 4(x-1)(x+1)$$

$$2x^2 + 4 = 4x^2 - 4 \implies x^2 = 4.$$

القيمتان -2 و 2 مسموحتان، ولذلك

$$S = \{-2, 2\}.$$

المميز 

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$


 $\Delta > 0$
مختلفان حلان


 $\Delta = 0$
مضاعف حل


 $\Delta < 0$
حقيقي حل لا

$$\Delta > 0 : \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

مثال 19



$$12x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$a = 12, \quad b = -7, \quad c = -10$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 12 \times (-10) = 529 = 23^2.$$

$$x_1 = \frac{7 - 23}{24} = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{7 + 23}{24} = \frac{5}{4}.$$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right\}$$

متى نحلل ومتى نستعمل المميز؟

📖 إذا لم يظهر التحليل

استعمل Δ ؛ فهو طريقة عامة ومنظمة لأي معادلة تربيعية.

📖 إذا كان التحليل واضحاً

استعمله مباشرة، فهو غالباً أسرع:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

واضح؟ التحليل هل

حلّ نعم:

Δ احسب لا:

الفكرة الأساسية

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \implies X = x^2, X \geq 0$$

فتصبح المعادلة تربيعية في X .

مثال 20

$$2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \implies 2X^2 - 5X - 3 = 0$$

$$(2X + 1)(X - 3) = 0 \implies X = -\frac{1}{2} \text{ أو } X = 3.$$

نرفض $X = -\frac{1}{2}$ لأن $X \geq 0$ ، ثم $X^2 = 3$ ، ومنه

$$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

الفكرة

إذا تكررت العبارة نفسها مثل $u(x)$ و $[u(x)]^2$ ، نضع $X = u(x)$ ، نحل في X ، ثم نرجع إلى x .

مثال 21 ✓

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0, \quad x \neq 0$$

بوضع $X = x + \frac{1}{x}$ نحصل على

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \implies X = 2 \text{ أو } X = 3.$$

ثم نحل $x + \frac{1}{x} = 2$ و $x + \frac{1}{x} = 3$ مع احترام $x \neq 0$.

المعادلات الجذرية: التحقق ضروري

الخطوات

1. شروط التعريف: $A(x) \geq 0$ إذا ظهر $\sqrt{A(x)}$.
2. نزل الجذر: $\sqrt{A(x)} = B(x)$ ، ونفرض $B(x) \geq 0$.
3. نربع الطرفين.
4. نحل المعادلة الجديدة.
5. نتحقق في المعادلة الأصلية.

انتبه



التربيع قد يضيف حلولاً دخيلة.



مثال 22 ✓

$$\sqrt{x+2} = x$$

بما أن الطرف الأيسر غير سالب، نحتاج إلى $x \geq 0$.

$$x+2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \implies x = 2 \text{ أو } x = -1.$$

نرفض -1 لأنه لا يحقق الشرط، ولذلك

$$S = \{2\}.$$

القواعد الأساسية

إذا كان $a \geq 0$ فإن

$$|u| = a \implies u = a \text{ أو } u = -a.$$

أما إذا كان $a < 0$ فلا يوجد حل.

ملاحظة إذا كان الطرف الثاني عبارة

في المعادلة $|u(x)| = v(x)$ نفرض أولاً $v(x) \geq 0$ ، ثم نحل

$$u(x) = v(x) \quad \text{أو} \quad u(x) = -v(x).$$

مثال 23



$$|2x - 3| = x + 1$$

نفرض $x + 1 \geq 0$ ، ثم ندرس حالتين:

$$2x - 3 = x + 1 \implies x = 4,$$

$$2x - 3 = -(x + 1) \implies x = \frac{2}{3}.$$

القيمتان مقبولتان:

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, 4 \right\}.$$

قاعدة مباشرة



$$|u(x)| = |v(x)| \implies u(x) = v(x) \text{ أو } u(x) = -v(x).$$

مثال 24



$$|x - 1| = |2x + 3|$$

$$x - 1 = 2x + 3 \text{ أو } x - 1 = -(2x + 3)$$

$$S = \left\{-4, -\frac{2}{3}\right\}.$$

تحدٍ سريع ؟

ما التقنية الأنسب لكل معادلة؟

1. $(x^2 - 9)(2x - 1) = 0$

2. $3x^2 - 5x - 2 = 0$

3. $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

4. $\sqrt{3x + 4} = x$

5. $|2x - 3| = x + 1$

تحليل  مميز  $\Leftrightarrow$ تغيير متغير  تربيع + تحقق  حالتان

حل في $\mathbb{R}$ 

$$1) \quad 4(2x - 1) - 3(x + 2) = 5 - x,$$

$$2) \quad (x^2 - 9)(2x - 1) = 0,$$

$$3) \quad \frac{x+2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 4,$$

$$4) \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

$$5) \quad 2x^4 - 5x^2 - 3 = 0.$$

اكتب في كل سؤال: المجال $\rightarrow$ الطريقة $\rightarrow$ الحل $\rightarrow$ مجموعة الحلول.

حل في $\mathbb{R}$ 

6) $\sqrt{3x + 4} = x,$

7) $|2x - 3| = x + 1,$

8) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 5(x^2 - 3x + 1) + 4 = 0,$

9) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) + 6 = 0.$

تذكير 

في السؤال 9: $x \neq 0$. وفي السؤال 6: لا تنسَ التحقق بعد التربيع.

تصحيح مختصر — الأسئلة 1 إلى 3

1 — معادلة خطية ✓

$$.5x - 10 = 5 - x \Rightarrow 6x = 15 \Rightarrow S_1 = \{\frac{5}{2}\}$$

2 — جداء معدوم ✓

$$.(x - 3)(x + 3)(2x - 1) = 0 \Rightarrow S_2 = \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$$

3 — معادلة كسرية ✓

$$. S_3 = \{-2, 2\} \text{ ومنه } x^2 = 4, \text{ وبعد إزالة المقامات: } x \neq \pm 1$$

تصحيح مختصر — الأسئلة 4 إلى 6

4 — الدرجة الثانية ✓

$$\Delta = 49, \text{ ومنه } x = -\frac{1}{3} \text{ أو } x = 2 : S_4 = \{-\frac{1}{3}, 2\}.$$

$X = x^2 - 5$ ✓

$$(2X + 1)(X - 3) = 0, \text{ نرفض } X < 0, \text{ ثم } x^2 = 3 : S_5 = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

6 — جذرية ✓

$$x \geq 0, \text{ وبعد التربيع } (x - 4)(x + 1) = 0, \text{ نرفض } -1 : S_6 = \{4\}.$$

7 — قيمة مطلقة ✓

الحالتان تعطيان $x = 4$ و $x = \frac{2}{3}$ ، ولذلك

$$S_7 = \left\{ \frac{2}{3}, 4 \right\} .$$

8 — تغيير المتغير ✓

نضع $X = x^2 - 3x + 1$ ، فنجد $X = 1$ أو $X = 4$ ، ثم نعود إلى x :

$$S_8 = \left\{ 0, 3, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\} .$$

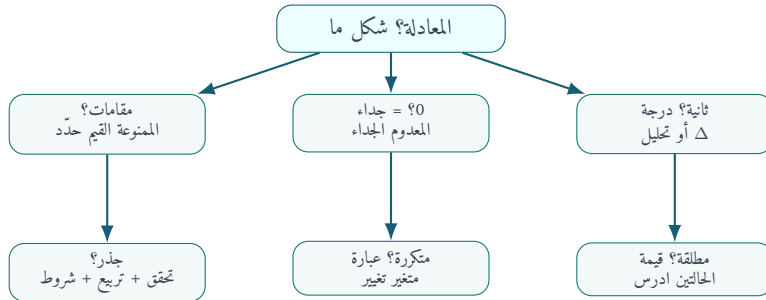
9 — تغيير المتغير مع شرط $x \neq 0$ ✓

نضع

$$X = x - \frac{2}{x},$$

فنحصل على $X^2 - 5X + 6 = 0$ ، أي $X = 2$ أو $X = 3$. بعد الرجوع إلى x نحصل على

$$S_9 = \left\{ 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right\}.$$



؟ بطاقة خروج

قبل نهاية الحصة، أجب عن سؤالين:

1. متى نستعمل تغيير المتغير؟

2. لماذا نتحقق بعد التربيع؟



ما يجب أن أتذكره

- ▶ المجال قبل الحساب.
- ▶ اختر الطريقة حسب شكل المعادلة.
- ▶ لا تهمل القيم الممنوعة.
- ▶ التحقق ضروري بعد التربيع.
- ▶ اكتب مجموعة الحلول S بوضوح.