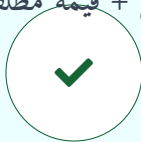


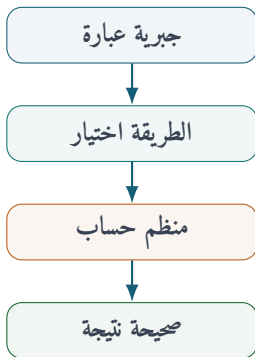
طرائق الحساب الجبري

من اختيار الشكل المناسب إلى نتيجة صحيحة



◎ تعويض + كسور + قوى وجذور + تحليل + قيمة مطلقة

لماذا نحتاج الحساب الجبري؟



فكرة الدرس

الحساب الجبري ليس حفظ قواعد فقط. هو اختيار الشكل الأنسب للهدف:

تبسيط

تحليل

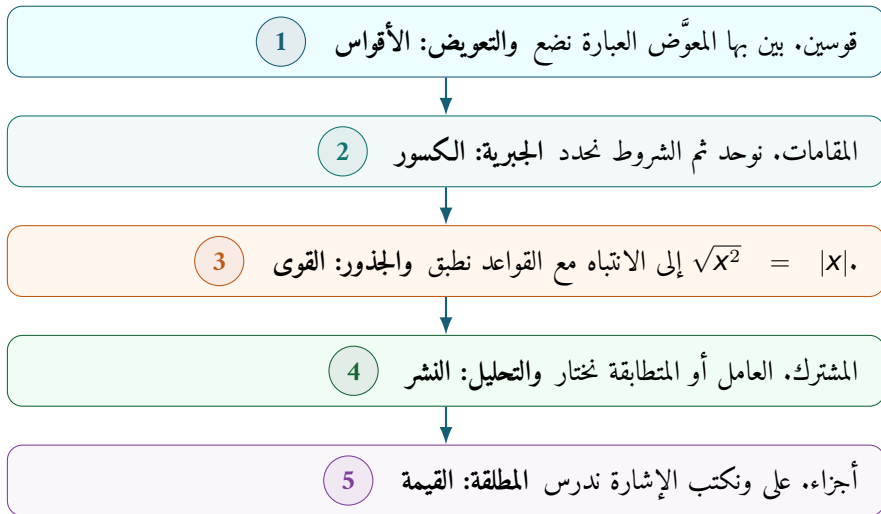
تعويض

حذف قيمة مطلقة

كل خطوة يجب أن تحافظ على **مجال التعريف**.

سؤال سريع

هل ننشر الأقواس دائماً؟ لا. أحياناً الشكل المحلل أسرع وأوضح.



❏ قبل أي حساب اسأل

- ▶ هل توجد قيم ممنوعة بسبب مقام أو جذر؟
- ▶ ما الشكل المطلوب: منشور، محلل، كسر واحد، أم دالة على أجزاء؟
- ▶ هل التحليل أسرع من النشر؟ وهل يمكن التحقق بتعويض قيمة بسيطة؟

❓
أولاً المجال

❏
الشكل اختر

✓
أخيراً تحقق

خطأ شائع: نسيان مجال التعريف

⚠ انتبه

في المعادلة

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

نبدأ بالشرط: $x \neq 1$. إذا اختزلنا نحصل على

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1.$$

لكن $x = 1$ قيمة ممنوعة في المعادلة الأصلية.

$$S = \emptyset$$

⚠ الاختزال لا يلغي الشروط الأصلية.

الفكرة الأساسية

عند تعويض المتغير x بعباراة u ، نستبدل **كل ظهور** لـ x بالعباراة (u) بين قوسين.

$$\boxed{x^2 - 3x + 2} \implies \boxed{(u)^2 - 3(u) + 2}$$

تذكير

حساب $f(x + 1)$ أو $f(2x - 1)$ هو تركيب دوال: $f(u(x))$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 2$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \\ &= x^2 - x \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \\ &= x^2 - x \\ f(x+1) &= x^2 - x . \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \\ &= x^2 - x \\ f(x+1) &= x^2 - x . \end{aligned}$$

$$f(2x-1) = (2x-1)^2 - 3(2x-1) + 2$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \\ &= x^2 - x \\ f(x+1) &= x^2 - x . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2x-1) &= (2x-1)^2 - 3(2x-1) + 2 \\ &= 4x^2 - 10x + 6 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - 3(x+1) + 2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2 \\ &= x^2 - x \\ f(x+1) &= x^2 - x . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2x-1) &= (2x-1)^2 - 3(2x-1) + 2 \\ &= 4x^2 - 10x + 6 \\ f(2x-1) &= 4x^2 - 10x + 6 . \end{aligned}$$

إذا كان $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ ✓

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 \\ &= 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 2 + 1 \\ &= 3n^2 + 4n + 2. \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 3n^2 + 4n + 2$$

تدريب سريع ✎

إذا كانت $f(x) = 2x^2 - x + 3$ ، احسب $f(-x)$ و $f(x-2)$.

النتيجة المفصلة



$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x) + 3 = 2x^2 + x + 3,$$

$$\begin{aligned} f(x-2) &= 2(x-2)^2 - (x-2) + 3 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - x + 2 + 3 \\ &= 2x^2 - 9x + 13. \end{aligned}$$

$$f(-x) = 2x^2 + x + 3 \qquad f(x-2) = 2x^2 - 9x + 13$$

توحيد المقامات والاختزال

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

مع الشروط: $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$.

 انتبه

لا نختزل إلا عوامل مضروبة مشتركة. لا نختزل حدوداً داخل مجموع أو فرق.

من أجل $x \neq -1$ ✓

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2}{x+1} - \frac{x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$A(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1.$$

كسر مركب: نحول القسمة إلى ضرب

✓ إذا كان $x \neq 0$ و $x \neq -1$

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}} \\ &= \frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)}}{\frac{x+1+x}{x(x+1)}} = \frac{1}{2x+1}. \end{aligned}$$

$$B(x) = \frac{1}{2x+1}$$

⚠ انتبه

نضيف الشرط $2x+1 \neq 0$ لأن مقام الكسر المركب الأصلي لا يجوز أن يساوي صفراً.

انتبه



الكتابة الآتية خطأ:

$$\frac{x+2}{x} = 3.$$

السبب: $x+2$ مجموع، وليس جداء عوامل.

$$\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}, \quad x \neq 0.$$

أما هنا فيجوز الاختزال:

$$\frac{x(x+2)}{x} = x+2, \quad x \neq 0.$$

بسط مع ذكر شروط التعريف 

$$A = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}, \quad B = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}, \quad C = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$


القيم استبعد


أمكن إن حل


النتيجة اكتب

التأني مع الشروط ✓

$$A = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

$$A = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad x \neq 1, -1.$$

$$B = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3},$$

$$B = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \neq 2, -3.$$

$$C = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$C = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq 0, -1.$$

إذا كان $a \neq 0$ و $m, n \in \mathbb{Z}$ 

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}, & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, & (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n, & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, & a^{-n} &= \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

انتبه 

عندما يكون الأس حقيقياً، نفترض غالباً أن الأساس موجب حتى تبقى القوة معرفة في $\mathbb{R}$.

مثال: تبسيط باستعمال خواص القوى

$$A = \frac{(2x^3)^2 x^{-1}}{4x^2} \text{ حيث } x \neq 0 \quad \checkmark$$

$$(2x^3)^2 = 2^2(x^3)^2 = 4x^6,$$

$$A = \frac{4x^6 x^{-1}}{4x^2} = \frac{4x^5}{4x^2} = x^3.$$

$$A = x^3$$

$$B = \frac{3^{n+2} - 3^{n+1}}{3^n} \text{ بسط } \checkmark$$

$$3^{n+2} = 9 \times 3^n, \text{ و } 3^{n+1} = 3 \times 3^n.$$

$$B = \frac{9 \times 3^n - 3 \times 3^n}{3^n} = \frac{3^n(9 - 3)}{3^n} = 6.$$

$$B = 6$$

❓ نختزل العامل المشترك لأنه مضروب في البسط والمقام.

خواص الجذر التربيعي

إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ ، فإن

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b > 0).$$

والقاعدة الأساسية:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

 انتبه

لا نكتب $\sqrt{x^2} = x$ إلا إذا كان $x \geq 0$. عموماً: $\sqrt{x^2} = |x|$.

إزالة الجذر من المقام ✓

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

تبسيط جذر ✓

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

جذر مربع ✓

$$\sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1|.$$

بسط العبارات الآتية 

$$A = \frac{2^{n+3} + 2^{n+1}}{2^n}, \quad B = \frac{(x^{-2}y^3)^2}{x^{-1}y},$$

$$C = \sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{18}, \quad D = \sqrt{(x-4)^2}.$$

مؤشر الحل 

استخرج العامل المشترك في A ، اجمع الأسس في B ، واستعمل $\sqrt{u^2} = |u|$ في D .

النتائج ✓

$$A = \frac{2^n(8+2)}{2^n} = 10,$$

$$B = \frac{x^{-4}y^6}{x^{-1}y} = x^{-3}y^5 = \frac{y^5}{x^3},$$

$$C = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$D = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|.$$

$$A = 10 \quad B = \frac{y^5}{x^3} \quad C = 4\sqrt{2} \quad D = |x-4|$$

تستعمل للنشر أو التحليل 

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

اختيار الاتجاه 

من اليسار إلى اليمين: نشر. من اليمين إلى اليسار: تحليل.

✓ فرق بين مربعين

$$\begin{aligned}A(x) &= (2x - 3)^2 - (x - 1)^2 \\&= [(2x - 3) - (x - 1)][(2x - 3) + (x - 1)] \\&= (x - 2)(3x - 4).\end{aligned}$$

$$A(x) = (x - 2)(3x - 4)$$

❓ لماذا؟

استعمال فرق مربعين أسرع من نشر المربعين ثم إعادة التحليل.

✓ حلل العبارة

$$\begin{aligned}B(x) &= (x+2)(3x-1) - (x+2)^2 \\&= (x+2)[(3x-1) - (x+2)] \\&= (x+2)(2x-3).\end{aligned}$$

$$B(x) = (x+2)(2x-3)$$

العامل المشترك قد يكون $x+2$ وليس عدداً فقط. 🧩

استعمل المتطابقة أو العامل المشترك 

$$A(x) = 9x^2 - 25, \quad B(x) = (x - 3)^2 - 4(x - 3),$$

$$C(x) = (2x + 1)^2 - (x - 2)^2, \quad D(x) = x^3 - 4x.$$



مربعين فرق



مشارك عامل



كامل تحليل

النتائج ✓

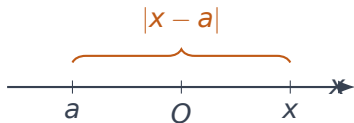
$$A(x) = 9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5),$$

$$B(x) = (x - 3)^2 - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 7),$$

$$C(x) = (2x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)(3x - 1),$$

$$D(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2).$$

كل عبارة كتبت على شكل جداء عوامل.



معنى القيمة المطلقة



$$|x| = d(x, 0), \quad |x - a| = d(x, a).$$

مثلاً:

$$|5 - 2| = 3, \quad |2 - 5| = 3.$$

فكرة هندسية

$|x - a| \leq r$ يعني أن x داخل المجال $[a - r, a + r]$ ،
حيث $r \geq 0$.

الكتابة على أجزاء

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

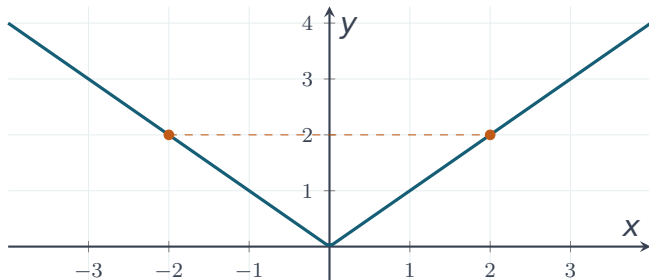
وبصورة عامة:

$$|u(x)| = \begin{cases} u(x), & u(x) \geq 0, \\ -u(x), & u(x) < 0. \end{cases}$$

طريقة الحذف

نحل $u(x) = 0$ ، نحدد إشارة $u(x)$ ، ثم نستبدل القيمة المطلقة حسب الإشارة.

المنحنى البياني للدالة $f(x) = |x|$



ملاحظة 

المنحنى متناظر حول محور الترتيب، ولذلك $| -x | = |x|$.

✓ اكتب $|2x - 3| + x$ دون رمز القيمة المطلقة

العبرة $2x - 3$ تنعدم عند $x = \frac{3}{2}$. إذن:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 3 - 2x, & x < \frac{3}{2}, \\ 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

ومن ثم:

$$|2x - 3| + x = \begin{cases} 3 - x, & x < \frac{3}{2}, \\ 3x - 3, & x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

احذف $|(x-1)(x+2)|$ ✓

الجذران هما -2 و 1. إشارة الجداء موجبة خارج الجذرين وسالبة بينهما.

$$|(x-1)(x+2)| = \begin{cases} (x-1)(x+2), & x \leq -2, \\ -(x-1)(x+2), & -2 < x < 1, \\ (x-1)(x+2), & x \geq 1. \end{cases}$$



$$F(x) = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} \quad \text{بسط} \quad \checkmark$$

$$F(x) = |x-2| + |x+1|.$$

تتغير الإشارة عند -1 و 2 ، لذلك:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < -1, \\ 3, & -1 \leq x < 2, \\ 2x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\sqrt{u^2} = |u| \text{ دائماً وليس } u$$

تطبيق: اكتب دون رمز القيمة المطلقة

تمرين تطبيقي 

$$\begin{aligned} A(x) &= |x + 1| - 2, & B(x) &= |x - 2| + |x + 1|, \\ C(x) &= \sqrt{(3x + 6)^2}, & D(x) &= \frac{|x - 1|}{x - 1} \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

🔗 طريقة واحدة لجميع الأسئلة

حدد القيم التي تغير الإشارة، ثم اكتب العبارة على المجالات الناتجة.

النتائج ✓

$$A(x) = \begin{cases} -x - 3, & x < -1, \\ x - 1, & x \geq -1, \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < -1, \\ 3, & -1 \leq x < 2, \\ 2x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} -3x - 6, & x < -2, \\ 3x + 6, & x \geq -2, \end{cases} \quad D(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$D_D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

تبسيط مع حفظ مجال التعريف ✓

$$A(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \times \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

إذن $x \neq -1, 1$ ، وبعد التحليل والاختزال:

$$A(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

✓ عندما تتكرر x^2

لتبسيط

$$B = x^4 - 5x^2 + 6,$$

نضع $X = x^2$ ، فنحصل على

$$B = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3).$$

وبالعودة إلى x :

$$B = (x^2 - 2)(x^2 - 3) .$$



ما يجب تذكره

- ▶ نبدأ دائماً بمجال التعريف والشروط.
- ▶ التعويض الصحيح يحتاج إلى أقواس.
- ▶ الاختزال يكون بين عوامل مضروبة فقط.
- ▶ $\sqrt{x^2} = |x|$ قاعدة أساسية.
- ▶ التحليل مفيد جداً قبل الاختزال أو دراسة الإشارة.
- ▶ حذف القيمة المطلقة يعتمد على إشارة العبارة داخلها.

احسب بدقة، لا بكثرة الخطوات. ✓